2003RP-04

Partage des coûts et tarification des infrastructures
Le cas des réseaux municipaux souterrains

Marcel Boyer, Michel Moreaux, Michel Truchon

Rapport de projet
Project report

Montréal
Avril 2003
Révisé en juin 2003

CIRANO
Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations

CIRANO

Le CIRANO est un organisme sans but lucratif constitué en vertu de la Loi des compagnies du Québec. Le financement de son infrastructure et de ses activités de recherche provient des cotisations de ses organisations-membres, d'une subvention d'infrastructure du ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, de même que des subventions et mandats obtenus par ses équipes de recherche.

CIRANO is a private non-profit organization incorporated under the Québec Companies Act. Its infrastructure and research activities are funded through fees paid by member organizations, an infrastructure grant from the Ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, and grants and research mandates obtained by its research teams.

Les organisations-partenaires / The Partner Organizations

PARTENAIRE MAJEUR
. Ministère des Finances, de l'Économie et de la Recherche [MFER]

PARTENAIRES
. Alcan inc.
. Axa Canada
. Banque du Canada
. Banque Laurentienne du Canada
. Banque Nationale du Canada
. Banque Royale du Canada
. Bell Canada
. Bombardier
. Bourse de Montréal
. Développement des ressources humaines Canada [DRHC]
. Fédération des caisses Desjardins du Québec
. Gaz Métropolitain
. Hydro-Québec
. Industrie Canada
. Pratt & Whitney Canada Inc.
. Raymond Chabot Grant Thornton
. Ville de Montréal

. École Polytechnique de Montréal
. HEC Montréal
. Université Concordia
. Université de Montréal
. Université du Québec à Montréal
. Université Laval
. Université McGill

ASSOCIÉ AU :
. Institut de Finance Mathématique de Montréal (IFM^2)
. Laboratoires universitaires Bell Canada
. Réseau de calcul et de modélisation mathématique [RCM^2]
. Réseau de centres d'excellence MITACS (Les mathématiques des technologies de l'information et des systèmes complexes)

ISSN 1499-8610 (Version imprimée) / ISSN 1499-8629 (Version en ligne)

Partage des coûts et tarification des infrastructures Le cas des réseaux municipaux souterrains*

Marcel Boyer[†], *Michel Moreaux*[‡], *Michel Truchon*[§]

Résumé / *Abstract*

Dans les municipalités d'une certaine taille, les réseaux d'aqueduc, de collecte des eaux usées, de distribution de gaz naturel, de distribution électrique, de télécommunications, etc. passent dans des canalisations regroupées sous terre. La construction de ces ouvrages implique des coûts fixes très importants, qu'il faut partager entre les différents utilisateurs. Le problème de la répartition des coûts d'un réseau de conduits souterrain présente des caractéristiques particulières. On les illustre à l'aide d'un exemple et, après avoir passé en revue les méthodes de répartition proportionnelle, dont celle qui consiste à répartir les coûts proportionnellement à la longueur des conduits attribués aux usagers, on présente deux méthodes qui semblent des plus intéressantes dans ce contexte, soit la règle Shapley-Shubik et la méthode de répartition séquentielle. On passe en revue les propriétés satisfaites par ces méthodes et on discute des données nécessaires à leur application. En conclusion, on recommande le choix de la méthode de répartition séquentielle, qui semble à la fois la plus facile à appliquer et la plus susceptible de répondre à la problématique des conduits souterrains.

Mots clés : partage des coûts, réseaux souterrains, infrastructures.

Large cities have underground networks of pipes and/or wires for water, sewage, natural gas, electricity and telecommunication services. These networks carry heavy fixed costs that must be shared among users. This problem has specific characteristics that we illustrate with an example. After reviewing proportional cost sharing methods, including the one based on the length of the pipes, we present two cost sharing methods that appear to be more interesting in such contexts, namely the Shapley-Shubik and the serial cost sharing rules. We review the properties satisfied by these methods and we discuss the data required for their application. We conclude by recommending the serial cost sharing rule, which seems easier to apply and more appropriate in the context of an underground network of pipes of all sorts.

Keywords: *Cost Sharing, Underground Network, Infrastructures.*

---

* Cette version du rapport a été remise au Ministère des Finances du Québec (MFQ) dans le cadre d'un partenariat de recherche entre le MFQ et le CIRANO. Les auteurs tiennent à remercier le Ministère pour son soutien financier. Il va de soi qu'ils sont les seuls responsables des opinions et analyses contenues dans ce document, qui ne représentent pas nécessairement celles du CIRANO ou du MFQ. Les auteurs acceptent également la responsabilité de toute erreur qui aurait pu se glisser dans le texte.

[†] CIRANO et Département de sciences économiques, Université de Montréal.

[‡] LEERNA, IDEI, IUF, Université de Toulouse I.

[§] CIRANO, CIRPÉE et Département d'économique, Université Laval; **auteur principal**.

Table des matières

Liste des tableaux

1 Introduction

Dans les municipalités d'une certaine taille, les réseaux d'aqueduc, de collecte des eaux usées, de distribution de gaz naturel, de distribution électrique, de télécommunications, etc. passent dans des canalisations regroupées sous terre. La construction de ces ouvrages implique des coûts fixes très importants, qu'il faut partager entre les différents utilisateurs. Par exemple, lorsque la voie publique est ouverte pour les besoins de développement ou de réfection de l'un de ces réseaux, les autres partenaires en profitent pour développer ou inspecter leurs propres installations et procéder aux entretiens et réparations nécessaires. Il peut s'avérer efficace d'ouvrir la voie sur une largeur ou longueur plus grande que strictement nécessaire, pour permettre aux autres partenaires de développer, entretenir ou vérifier leurs ouvrages. Quel montant ou quel pourcentage du coût d'ouvrir la chaussée et de procéder au développement des massifs communs devrait être supporté par chacun des partenaires, actuels et futurs ?

La réponse à cette question soulève généralement de multiples discussions et négociations entre les partenaires, qu'il s'agisse de partir de zéro ou de faire des modifications et des opérations d'entretien dans un réseau existant. Les règles de partage de coûts qui sont présentées dans Boyer, Moreaux et Truchon -ci-après BMT- (2002b)[1] et dont les propriétés sont étudiées dans BMT (2002c), peuvent venir à la rescousse et servir de mécanisme de facilitation dans la recherche d'une règle de partage efficace et équitable. Trois grandes classes de méthodes sont présentées dans ces documents : les méthodes de répartition proportionnelle, les règles inspirées par la théorie des jeux coopératifs et les méthodes de répartition séquentielle.

Le problème de la répartition des coûts d'un réseau de conduits souterrain présente des caractéristiques particulières et, de ce fait, mérite un traitement spécifique. C'est la raison d'être du présent document. À cette fin, on introduit d'abord un exemple pour illustrer les spécificités du problème et on le définit ensuite de façon très générale. En deuxième lieu, on reprend un certain nombre des propriétés qu'on retrouve dans la littérature économique et

[1] BMT (2002a) est le document [1] de la présente série sur le partage des coûts et la tarification des infrastructures. La liste de ces documents est donnée en annexe.

qui sont présentées dans BMT (2002c). Suit une brève discussion des méthodes de répartition proportionnelle, dont celle qui consiste à répartir les coûts proportionnellement à la longueur des conduits attribués aux usagers.[2] On présente ensuite, de façon assez détaillée, deux méthodes qui semblent les plus intéressantes dans ce contexte, soit la méthode Shapley-Shubik et la méthode de répartition séquentielle. On illustre les méthodes à l'aide de l'exemple. On énumère également les propriétés satisfaites par ces méthodes. Un tableau synoptique indique quelles propriétés sont satisfaites par quelles méthodes. Finalement, on discute des données nécessaires à l'application des méthodes retenues. En conclusion, on recommande le choix de la méthode de répartition séquentielle, qui semble à la fois la plus facile à appliquer et la plus susceptible de répondre à la problématique des conduits souterrains.

2 Le problème de la répartition des coûts communs

Pour illustrer la problématique et les méthodes de répartition qui vont suivre, on commence par présenter un exemple.

2.1 Un exemple

Imaginons un réseau souterrain composé de cinq sections ayant chacune un contenu homogène.[3] Il y a trois usagers qui occupent ce réseau, un gros (G), un moyen (M) et un petit (P). Le petit peut être vu comme un regroupement de petits usagers. G ne peut utiliser que des conduits de 4 pouces alors que M et P souhaitent utiliser respectivement des conduits de 3 et 1 pouces. Le Tableau 1 présente la longueur des sections (en mètres) et le nombre de conduits requis par les usagers dans chacune des sections.

La présence de G dans une section entraîne l'installation de conduits de 4 pouces pour tous les usagers. On peut cependant insérer jusqu'à trois conduits de 1 pouce dans un de

[2] C'est la méthode actuellement en usage à la Commision des services électriques de Montréal (CSEM).

[3] Avec une subdivision assez fine du réseau, on peut toujours faire en sorte que le contenu des sections soit homogène.

Section	Longueur	G	M	P
1	100	16	0	0
2	200	12	3	0
3	300	0	2	2
4	400	8	4	1
5	200	6	0	1

Tableau 1 – Demandes des usagers

4 pouces. De façon similaire, si G n'est pas présent dans une section alors que M y est, on n'installe que des conduits de 3 pouces. On peut cependant insérer deux conduits de 1 pouce dans les conduits de 3 pouces.[4]

La composition de chacune des sections du réseau peut être décrite par un sextuplet $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ dont les composantes sont ainsi définies :

α_1 : le nombre de conduits de 4 pouces non partagés,

α_2 : le nombre de conduits de 3 pouces non partagés,

α_3 : le nombre de conduits de 1 pouce installés librement,

α_4 : le nombre de conduits de 4 pouces dans lesquels on a inséré 3 conduits de 1 pouce,

α_5 : le nombre de conduits de 4 pouces dans lesquels on a inséré 2 conduits de 1 pouce,

α_6 : le nombre de conduits de 3 pouces dans lesquels on a inséré 2 conduits de 1 pouce.

On suppose qu'il en coûte 150$ le mètre linéaire pour construire un massif plus un coût pour chacun des conduits installés dans ce massif. Un conduit de 4 pouces coûte 10$ le mètre. Son coût passe à 11$ si on y insère deux conduits de 1 pouce et à 12$ si on y insère trois conduits de 1 pouce. Un conduit de 3 pouces coûte 7$ le mètre et son coût passe à 8$ si on y insère deux conduits de 1 pouce. Finalement, un conduit de 1 pouce installé librement coûte 3$ le mètre. De façon précise, le coût de chaque mètre d'une section de composition α est donné par la fonction :

$$c(\alpha) = 150 + 10\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 + 12\alpha_4 + 11\alpha_5 + 8\alpha_6$$

[4] Cette convention reflète assez bien la pratique actuelle à la CSEM.

On applique la même fonction à chacune des sections du réseau. On pourrait utiliser des fonctions différentes pour chaque section.

La configuration de chaque section est conçue de façon à minimiser le coût de satisfaire à la demande ou aux besoins exprimés. On choisit donc la taille la plus petite possible pour les conduits, tout en respectant les contraintes énoncées plus haut. On cherche aussi à insérer le nombre maximal de conduits de 1 pouce dans des conduits de 3 ou 4 pouces. Ce principe, appliqué à la demande du Tableau 1, donne la configuration du Tableau 2, i.e. le nombre de conduits de chaque type, pour chaque section du réseau. Le tableau est complété par le coût au mètre de chaque section et par le coût total.

Section	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	Coût unitaire	Longueur	Coût total
1	16	0	0	0	0	0	310	100	31 000
2	15	0	0	0	0	0	300	200	60 000
3	0	2	0	0	0	1	172	300	51 600
4	13	0	0	0	0	0	280	400	112 000
5	7	0	0	0	0	0	220	200	44 000
Réseau									298 600

Tableau 2 – Configuration et coûts du réseau

Ce tableau indique, entre autres, que la section 3 doit comprendre trois conduits de 3 pouces, dont un dans lequel on insère deux conduits de 1 pouce. Ces derniers permettent de répondre aux besoins du petit usager. Les deux autres conduits de 3 pouces sont destinés à l'usager moyen. Selon la fonction de coût définie plus haut, cette section coûte $150 + (2 \times 7) + (1 \times 8) = 172$\$ le mètre. Comme sa longueur est de 300 mètre, son coût total s'élève à 51 600\$.

On suppose finalement un **coût fixe** de 50 000\$ lié à l'administration de l'ensemble du réseau, ce qui donne un coût total à répartir de **348 600\$**. Encore une fois, il s'agit d'un exemple dont le seul but est d'illustrer les idées et méthodes présentées dans ce rapport. Il faut donc éviter de comparer les résultats présentés plus loin à des situations concrètes.

Cet exemple illustre le problème de partage de coûts d'une manière assez générale. Les usagers, clients, agents ou entités ont des demandes qui peuvent prendre plusieurs dimensions et qui peuvent être fort différentes les unes des autres. De plus, ces différentes demandes commandent un projet commun dont les caractéristiques ne sont pas nécessairement obtenues par la simple sommation des demandes individuelles. Le lien entre ces dernières et les coûts peut donc être assez complexe. Qui plus est, un coût fixe s'ajoute aux coûts variables.

2.2 La formulation générale

De manière générale, le problème de partage de coûts dans un réseau souterrain se présente comme suit. Il y a n usagers formant un ensemble $N = \{1, \ldots, n\}$, s sections et k paramètres permettant de décrire la demande de chaque usager dans une section. Ces paramètres correspondent aux différents types de conduit, aux autres équipements, comme les puits d'accès, ou aux caractéristiques de ces équipements (dimension, isolation, etc.). Il faut donc $m = s \times k$ nombres pour représenter la demande d'un usager sur l'ensemble du réseau. Les usagers sont repérés par un indice i (parfois j lorsqu'il faut distinguer entre deux usagers). La demande de l'usager i est un vecteur ou liste q_i de dimension m. La suite ou le vecteur des demandes des différents usagers est notée $Q = (q_1, \ldots, q_n)$. Il s'agit d'une suite de $n \times m$ nombres. Elle peut être mise sous la forme d'un tableau, les mathématiciens diraient une matrice :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nm} \end{bmatrix}$$

On peut parfois simplifier cette représentation dans la mesure où la demande d'un usager peut porter sur un sous-ensemble des caractéristiques. Ainsi, dans le cas de l'exemple de réseau introduit plus haut, P, M et G ne demandent respectivement que des conduits de 1, 3 et 4 pouces. On peut donc représenter les demandes de l'ensemble des usagers par le tableau qui suit, où les colonnes correspondent aux différentes sections du réseau et les rangées à la fois aux usagers et aux conduits de 1, 3 et 4 pouces. En fait, on pourrait simplifier encore davantage cette représentation en éliminant les 0.

$$Q = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si les n usagers décident de coopérer, la quantité à produire ou l'ampleur du projet à réaliser est donnée par une règle d'agrégation qui associe à chaque valeur possible de la liste Q un projet commun, capable de répondre à tous les besoins au moindre coût. Supposons que ce projet commun puisse être décrit à l'aide de h paramètres, les capacités d'un réseau par exemple ou le nombre de types de conduit dans un réseau souterrain. Il se peut que les paramètres qui servent à définir les demandes individuelles conviennent également à définir le projet commun, auquel cas $h = k$, mais cela n'est pas nécessairement le cas. Ce n'est pas le cas dans l'exemple de réseau présenté plus haut, où il faut six paramètres pour décrire la composition de chacune des cinq sections du réseau alors que trois suffisent pour décrire les demandes. Cet exemple montre également que la règle d'agrégation peut être très complexe, ce qui nous amène à la définition de la fonction de coût.

2.3 Les fonctions de coût

La formulation du problème est complétée par l'introduction d'une fonction, i.e. d'une règle, qui attribue des coûts aux valeurs possibles des demandes. Cette fonction est notée C. De façon précise, $C(Q)$ est le coût de satisfaire à une demande Q. On a vu plus haut qu'une demande Q se traduit en une certaine configuration du réseau dont les caractéristiques peuvent plus ou moins correspondre à celles qui servent à exprimer les demandes. Le nombre $C(Q)$ est donc le coût de cette configuration.

En fait, il peut y avoir plusieurs façons de satisfaire à une demande, i.e. de traduire une demande en un projet commun. Ainsi, dans l'exemple de réseau, on peut satisfaire aux besoins de P avec des conduits de 4, 3 ou 1 pouces ou encore en insérant des conduits de 1 pouce dans des conduits de 3 ou 4 pouces. Différents projets peuvent avoir des coûts différents. Le nombre $C(Q)$ doit s'entendre comme le coût du projet qui permet de répondre aux besoins exprimés de la manière la moins coûteuse possible. Ce meilleur projet peut changer avec la demande elle-même et les conditions du marché, comme les prix. Il faut cependant se rappeler qu'on suppose Q donné.

On a désigné plus haut une certaine configuration du réseau par α. Cette configuration est en fait une fonction de Q et on devrait la noter $\alpha(Q)$. On vient donc de dire qu'il peut y avoir plusieurs fonctions $\alpha(Q)$. Désignons par $A(Q)$ l'ensemble de tous les projets, i.e. toutes les fonctions $\alpha(Q)$, capables de répondre à la demande Q. Soit $c(\alpha(Q))$ le coût d'un projet $\alpha(Q)$. La fonction de coût C est alors définie par :

$$C(Q) = \min_{\alpha(Q)\in A(Q)} c(\alpha(Q))$$

On a aussi parfois besoin des coûts des demandes de sous-ensembles d'usagers S. Comme C est défini sur l'ensemble des suites Q, il faut mettre les demandes individuelles et celles de tout sous-ensemble d'usagers sous cette forme pour pouvoir leur appliquer C. On représente la demande d'un sous-ensemble S d'usagers par Q^S, qui est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes, autres que celle des usagers de S, sont ramenées à 0. Le coût de satisfaire uniquement aux demandes des usagers de S est donc $C\left(Q^S\right)$. Comme cas particulier, on a $C\left(Q^{\{i\}}\right)$, qui est le *coût de faire cavalier seul* (CS). En fait, on a parfois besoin du coût de faire cavalier seul pour différentes demandes Q. Aussi, on définit les fonctions de coût de faire cavalier seul pour les différents usagers. Elles sont notées c_i et définies par :

$$c_i(q_i) = C\left(Q^{\{i\}}\right), \ i = 1, \ldots, n$$

où q_i est, rappelons-le, la composante de Q qui concerne l'usager i. On suppose C non décroissante. Une augmentation de la demande de la part d'un ou plusieurs usagers ne peut entraîner une diminution de coût. Elle peut cependant laisser les coûts inchangés. C'est le cas s'il est possible de répondre à une plus grande demande de la part d'un usager sans changer la production. Par contre, on suppose que la fonction C induit des fonctions c_i croissantes.

2.4 La règle de répartition

Une règle de répartition est une fonction x qui, pour toute demande Q et toute fonction de coût C, spécifie la part du coût $C(Q)$ supportée par les différents usagers. On note $x_i(Q, C)$ la charge imputée à l'usager i et $x(Q, C)$ la liste de ces dernières :

$$x(Q, C) = (x_1(Q, C), \ldots, x_n(Q, C))$$

Une règle de répartition satisfait normalement : $\sum_{i=1}^{n} x_i(Q, C) = C(Q)$. Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on écrit x_i pour $x_i(Q, C)$.

3 Principes généraux et propriétés des méthodes

Il est généralement facile de s'entendre sur des principes généraux quant au choix d'une méthode de répartition de coûts. Par exemple, à la Commission des services électriques de Montréal, un comité a déjà suggéré la liste suivante :

- Équité : permettre une répartition juste et raisonnable pour les usagers du réseau.
- Responsabilité : faire prendre conscience, aux intervenants du réseau, des impacts de leurs besoins reliés aux règles établies.
- Transparence : permettre de valider facilement les règles établies.
- Faisabilité : facilité d'application des règles en termes de temps et d'efforts.
- Légalité : répondre aux lois existantes (en considérant la possibilité de changement).

Le problème est évidemment de donner une formulation précise à de tels principes et de les rendre opérationnels. L'équité, entre autres, peut prendre différentes formes. Dans le document BMT (2002c), on énonce justement un certain nombre de propriétés de façon formelle. Une définition formelle permet d'établir en toute rigueur si une méthode de partage donnée satisfait à une propriété en toutes circonstances ou si, au contraire, il existe des circonstances ou ce n'est pas le cas. Dans le présent document, on se contente de rappeler brièvement ces propriétés de façon informelle.

Plusieurs d'entre elles s'adressent à un des trois premiers critères ci-dessus, à savoir l'équité, la responsabilité et la transparence. Les questions de légalité sont laissées de côté.

La faisabilité s'adresse en partie aux données requises et aux méthodes de calcul. Ces considérations ne font pas partie des propriétés. Elles sont cependant importantes et une sous-section y est consacrée.

Le propriétés sont regroupées en deux catégories. Les premières sont dites normatives. Elles peuvent être associées à des considérations d'équité : comment traite-t-on les demandes comparables, y a-t-il protection des petits contre l'ampleur de la demande des plus gros, comment les parts des coûts évoluent-elles avec les demandes et les coûts, dans quels intervalles les contributions se situent-elles ? Les autres propriétés concernent la cohérence des règles de répartition : les contributions sont-elles indépendantes du choix des unités de mesure, sont-elles proportionnelles aux demandes lorsque les coûts le sont, sont-elles les mêmes, qu'on applique la règle au coût total ou séparément à différents éléments de coûts, etc. ? Ces deux catégories ne sont cependant pas parfaitement étanches. Certaines propriétés normatives incorporent des éléments de cohérence et réciproquement.

Pour faire suite à la description des propriétés, on présente un tableau, tiré de BMT (2002c), qui indique quelles sont les propriétés qui sont satisfaites par les différentes méthodes présentées dans le survol. Un deuxième tableau indique, pour quelques méthodes, quelles sont les propriétés que chaque méthode est la seule à satisfaire. On termine le document avec quelques considérations sur le choix d'une méthode.

3.1 Propriétés normatives

Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE) Si deux usagers ont des demandes équivalentes, en termes des coûts de faire cavalier seul (CS), elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux. A plus forte raison, deux usagers qui ont des demandes identiques devraient se voir imputer la même part des coûts totaux.

Préservation des rangs (RG) Les contributions des différentes usagers devraient être ordonnées selon l'importance de leurs demandes, telle que mesurée par le CS. Celles qui demandent plus devraient payer davantage que celles qui demandent moins.

Principe séquentiel (PS) La contribution d'un usager ne devrait pas être affectée par l'ampleur des demandes plus grandes que la sienne.

Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN) Si un usager a une demande nulle, il ne devrait rien payer. De plus, les contributions des autres ne devraient pas dépendre de la présence ou non de cet usager dans le problème de partage.

Insensibilité des contributions aux usagers négligeables (IEN) Si le coût additionnel de répondre à la demande d'un usager, en plus de celles de n'importe quel sous-groupe d'usagers, est toujours égal à son CS, la contribution exigée de cet usager devrait être son CS. De plus, les contributions des autres ne devraient pas dépendre de la présence ou non de cet usager dans le problème de partage.

Insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents (INP) Le classement des contributions de deux usagers ne doit pas dépendre de la demande des autres usagers.

Monotonie par rapport aux coûts (MCT) Si les coûts devaient s'avérer plus élevés que prévu, quelle que soit l'ampleur du projet ou les niveaux de production à réaliser, alors les parts des coûts imputées aux différents usagers ne devraient pas diminuer.

Monotonie par rapport à la demande (MD) La contribution exigée d'un usager ne doit pas diminuer si les besoins exprimés par cet usager augmentent.

Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN) Dans un contexte d'économies d'échelle, l'augmentation de la demande d'un usager fait diminuer le coût moyen. Les autres usagers devraient profiter de cette diminution du coût moyen.

Monotonie croisée positive par rapport à la demande (MCP) Dans un contexte de déséconomies d'échelle, l'augmentation de la demande d'un usager fait augmenter le coût moyen. Les autres usagers devraient absorber une partie de cette augmentation du coût moyen.

Participation volontaire (PA) Une règle favorise la participation volontaire si elle n'exige jamais plus d'un usager que son coût de faire cavalier seul (CS).

Test du coeur ou absence d'interfinancement (CO) Une répartition passe le test du coeur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'usagers ne dépasse pas le coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété.[5] On peut aussi voir (CO) comme une condition spécifiant l'absence d'interfinancement ou encore la robustesse à la sécession. Le test du coeur implique évidemment la participation volontaire dans la mesure où on admet les coalitions d'un seul usager dans le test du coeur.

Anti-participation (APA) La participation volontaire et le test du coeur ne sont pas possibles en présence de déséconomies d'échelle. Dans ces cas, au moins un usager doit payer plus que son CS. Pour des raisons d'équité, on peut alors exiger que tous les usagers paient au moins leur CS. C'est ce que prescrit l'anti-participation.

Test de l'anti-coeur (ACO) Une répartition passe le test de l'anti-coeur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'usagers n'est pas inférieure au coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété. Tout comme (APA), c'est une propriété qu'on peut exiger ou du moins souhaiter en présence de déséconomies d'échelle.

[5] Voir l'annexe A pour la définition du concept de coeur.

3.2 Propriétés de cohérence

Insensibilité aux unités de mesure (IU) Une règle de partage de coûts est insensible aux unités de mesure si une transformation proportionnelle des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts.

Ordinalité (O) Une règle de partage de coûts satisfait l'ordinalité si une transformation croissante (mais pas nécessairement proportionnelle) des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts.

Séparation entre usagers (SE) La séparation entre usagers exige que, si le coût total est la somme des CS des usagers, alors chaque usager devrait payer exactement son CS.

Proportionnalité (PR) Si les coûts sont proportionnels aux quantités demandées, il devrait en être de même des contributions.

Additivité (AD) Si on peut séparer les coûts d'un projet en plusieurs composantes, répartir les composantes séparément devrait mener au même résultat que la répartition des coûts totaux.

Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC) Il s'agit d'un cas particulier de l'additivité. Si on peut décomposer les coûts totaux en coûts spécifiques ou directs et coûts communs, on devrait obtenir la même répartition des coûts totaux, qu'on applique la règle de partage à ces derniers ou qu'on l'applique aux coûts communs et qu'on impute les coûts spécifiques aux usagers concernés par ces derniers.

Cohérence (CH) Bien que les autres propriétés de cette sous-section soient aussi des propriétés de cohérence, la présente, qui prend plusieurs formes dans la littérature, dit essentiellement que, si un ou plusieurs usagers devaient se retirer du problème de partage des coûts, après avoir payé leurs contributions selon la règle de partage en vigueur, et que les membres restants devaient satisfaire à toute la demande, la contribution de ces derniers aux coûts résiduels, selon la même règle, ne devrait pas être différente de ce qu'elle aurait été dans le problème de partage original.

Cohérence faible (CHF) Si un certain nombre d'usagers ayant les plus petites demandes, en termes des coûts de faire cavalier seul, devaient quitter le problème après avoir payé leur dû selon la règle de partage en vigueur et qu'on appliquait la même règle pour répartir entre les autres le coût résiduel de la demande totale, leurs contributions seraient les mêmes que dans le problème original.

4 Choix d'une méthode pour les réseaux souterrains

Quelle ou quelles méthodes pourraient s'avérer intéressantes dans le présent contexte, eu égard aux propriétés qui viennent d'être énumérées ? Dans le document BMT (2002c), trois méthodes sont identifiées comme étant performantes à cet égard. Il s'agit de la règle du coût moyen, de la règle Shapley-Shubik et de la méthode de répartition séquentielle. La première s'applique cependant uniquement dans le contexte unidimensionnel, i.e. celui où les demandes individuelles s'expriment par un seul nombre et où ces dernières peuvent être sommées pour obtenir la demande globale. Cela exclut les réseaux souterrains. Dans la présente section, on va néanmoins dire quelques mots des méthodes de répartition proportionnelle, dont celle qui consiste à répartir les coûts proportionnellement à la longueur des conduits attribués aux usagers. On verra que cette façon de faire ne peut pas être assimilée à la règle du coût moyen et qu'elle n'en possède pas les propriétés. On présente ensuite, de façon succincte, la règle Shapley-Shubik et celle de répartition séquentielle. Finalement, on revient sur les propriétés de ces méthodes.

4.1 Les méthodes de répartition proportionnelle

De manière assez générale, ces méthodes consistent à exiger une contribution de base xb_i de l'usager i et à répartir le résidu du coût total du projet, une fois soustraites les contributions de base, entre tous les usagers, proportionnellement aux valeurs d'une certaine variable t_i. La formule générale prend donc la forme :

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j \right) \tag{1}$$

Il est à noter que le résidu $C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j$ peut être positif ou négatif.

Par le choix des xb_i et des t_i, on peut obtenir autant de règles que l'on veut. En posant $xb_i = 0$ et $t_i = 1$ pour tout i, ce sont les coûts totaux qui sont répartis de façon égalitaire entre les usagers :

$$x_i = \frac{1}{n} C(Q)$$

4.1.1 La règle du coût moyen

Il s'agit sans doute de la méthode la plus répandue et la plus simple. Elle s'applique à la classe générale de problèmes où les demandes sont homogènes et unidimensionnelles. Dans ces problèmes, les demandes individuelles sont représentées par des nombres non-négatifs q_i et la demande globale est la somme des demandes individuelles. Autrement dit, la fonction de coût est de la forme $C(Q) = c\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right)$. La règle du coût moyen consiste à répartir les coûts totaux proportionnellement aux quantités demandées. De façon équivalente, elle consiste à faire payer à chaque usager un montant qui est le produit de sa demande et du coût moyen, d'où son nom. Cette méthode est définie formellement par :

$$x_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^{n} q_j} C(Q) = q_i \frac{c\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right)}{\sum_{j=1}^{n} q_j} \tag{2}$$

Il s'agit clairement d'un cas particulier de la formule (1).

4.1.2 Répartition selon la longueur des conduits

Il s'agit de définir t_i dans la formule (1) comme étant la longueur totale des conduits exigés par les différents usagers. Dans le cadre de l'exemple, ces nombres sont facilement calculés à partir du Tableau 1. Cette méthode donne la répartition suivante :

	G	M	P	Total
x	236 148.39	78 716.13	33 735.48	348 600.00
%	68	23	10	100

4.1.3 Les propriétés des méthodes de répartition proportionnelle

La **règle du coût moyen** a des propriétés intéressantes. Elle satisfait nommément aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents (INP)
- Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)
- Proportionnalité (PR)
- Séparation entre usagers (SE)
- Cohérence (CH)

On sait également qu'elle est la seule à satisfaire à la fois aux propriétés d'additivité, de cohérence, de proportionnalité et de traitement égalitaire des équivalents (les égaux dans ce cas-ci). En prime, on obtient la monotonie par rapport aux coûts. En fait, on sait qu'elle est la seule à satisfaire à la fois à la proportionnalité et à la monotonie par rapport aux coûts.

Malheureusement, cette règle est définie uniquement dans le cas où les demandes sont unidimensionnelles, i.e. s'expriment par un seul nombre. Ce n'est évidemment pas le cas dans le problème traité ici. Dans ce contexte plus général, les méthodes de répartition proportionnelle ont généralement peu de propriétés intéressantes. C'est le cas de la méthode qui consiste à partager les coûts selon la **longueur des conduits** attribués. Elle ne satisfait qu'aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents (INP)
- Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Cohérence (CH)

Elle ne satisfait pas à (RG) et à (TE) parce qu'un usager peut avoir un CS plus élevé qu'un autre même si la longueur totale des conduits qu'il demande peut être moindre. La longueur des conduits n'est en effet pas la seule variable qui détermine les coûts. Elle ne satisfait pas à (MCN) parce qu'une augmentation de la demande de la part d'un usager qui fait augmenter le coût total va entraîner un accroissement de la contribution exigée de chacun, même s'il y a économies d'échelle. Elle ne satisfait pas à (PA) et à (CO) parce qu'on peut exiger plus d'un usager que son CS. En effet, la présence d'usagers avec de fortes exigences peut faire en sorte que la contribution exigée des petits est plus élevée que leurs CS.[6] Elle ne satisfait pas à (PR) parce que la répartition est proportionnelle à la longueur totale des conduits alors que les coûts pourraient être proportionnels à d'autres éléments de la demande. (SE) impliquant (PR), elle ne satisfait donc pas à (SE). Plus directement, dans le cas où le coût total est la somme des CS, les contributions ne sont pas nécessairement

[6] Cela peut expliquer en partie les contestations dont cette méthode est l'objet.

égales aux CS dans la mesure où les rapports entre les CS ne sont pas nécessairement égaux aux rapports entre les longueurs des conduits demandés.

4.2 La règle Shapley-Shubik

On peut résumer brièvement cette règle de la manière suivante. Supposons qu'on ordonne les usagers d'une certaine façon et qu'on fasse payer au premier le coût entier de ses besoins, en supposant qu'il est seul, et ensuite au deuxième le coût additionnel (incrémental) imposé par ses besoins, en supposant que lui et le premier usager sont seuls, et ainsi de suite. On répartirait alors le coût total de tous les besoins. Un telle répartition est dite *répartition selon les coûts incrémentaux.* Elle correspond à un arrangement donné des usagers, i.e. à l'ordre dans lequel on les choisit.

Certains usagers pourraient évidemment se plaindre de l'ordre choisi. Entre autres, le premier usager devrait se farcir des coûts importants liés à l'excavation, la réfection, etc., alors que le dernier se verrait imputer des coûts minimes, par exemple le simple coût de ses conduits. Shapley (1953) a apporté une réponse élégante à ce problème. Elle consiste à considérer tous les ordres possibles entre les usagers et à prendre comme répartition finale la moyenne des répartitions selon les coûts incrémentaux, la moyenne étant calculée par rapport aux ordres d'entrée. Les usagers se voient ainsi tous traités de façon symétrique.

4.2.1 La formule précise

Restons, pour le moment, dans le contexte où il n'y a que trois usagers, repérés pas les indices 1, 2 et 3. Définissons $\hat{c}(\{1\})$ comme le coût de satisfaire la demande de l'usager 1, i.e. de construire uniquement pour lui. Définissons ensuite $\hat{c}(\{1,2\})$ comme le coût de satisfaire conjointement à la demande des usagers 1 et 2, en excluant 3. Le coût de desservir les trois usagers ensemble est donné par $\hat{c}(\{1,2,3\})$. Si l'ordre d'entrée est $1, 2, 3$, la répartition selon les coûts incrémentaux donne les contributions suivantes pour les trois usagers : $\hat{c}(\{1\})$ pour le premier, $\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{1\})$ pour le deuxième et $\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{1,2\})$ pour le troisième. Si l'ordre d'entrée est $2, 3, 1$, ces contributions sont plutôt : $\hat{c}(\{2\})$ pour l'usager 2, $\hat{c}(\{2, 3\}) - \hat{c}(\{2\})$ pour l'usager 3 et $\hat{c}(\{1, 2, 3\}) - \hat{c}(\{2, 3\})$ pour l'usager 1.

Avec trois usagers, il y a six ordres possibles entre les usagers, représentés par autant de listes, soit :

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (3, 1, 2),\ (2, 3, 1),\ (3, 2, 1)$$

Dans ces six ordres, l'usager 1 arrive en premier une fois sur 3, en deuxième (après l'usager 2) une fois sur six, encore en deuxième mais après l'usager 3 une fois sur six et en troisième une fois sur trois, l'ordre entre les deux autres usagers n'ayant alors aucune importance. On peut en dire autant des usagers 2 et 3. La règle Shapley-Shubik, consistant à faire la moyenne des répartitions selon les coûts incrémentaux, donne donc la répartition :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{3}\hat{c}(\{1\}) + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{2\})\right] + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,3\}) - \hat{c}(\{3\})\right] + \tfrac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{2,3\})\right] \\
x_2 &= \tfrac{1}{3}\hat{c}(\{2\}) + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{1\})\right] + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{2,3\}) - \hat{c}(\{3\})\right] + \tfrac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{1,3\})\right] \\
x_3 &= \tfrac{1}{3}\hat{c}(\{3\}) + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,3\}) - \hat{c}(\{1\})\right] + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{2,3\}) - \hat{c}(\{2\})\right] + \tfrac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{1,2\})\right]
\end{aligned}$$

Cette méthode peut-être généralisée à un nombre quelconque d'usagers. Comme variante, on peut considérer que certains usagers ont une stature telle que les ordres d'entrée dans le consortium ne sont pas tous considérés. Certains usagers devraient en faire partie avant même que d'autres puissent joindre le consortium, ce qui peut permettre de représenter leur pouvoir de négociation respectif. On peut alors modifier la méthode Shapley-Shubik en conséquence. On peut aussi appliquer cette méthode à la répartition des bénéfices tirés de la coopération plutôt qu'aux coûts. Les résultats ne seraient pas nécessairement les mêmes.

Finalement, s'il y a un coût fixe, on peut le traiter de deux façons. La première consiste à l'inclure dans chacun des $\hat{c}(\cdot)$, ce qui revient à le répartir de façon égalitaire entre tous les usagers. C'est le traitement adopté dans l'exemple qui suit. La deuxième consiste à appliquer la méthode Shapley-Shubik aux coûts variables uniquement et à répartir le coût fixe selon une règle quelconque, par exemple proportionnellement à la répartition des coûts variables.

Exemple Les valeurs de la fonction $\hat{c}$, incluant le coût fixe, pour l'exemple de réseau sont données dans le tableau qui suit :

$$\hat{c}(\{G\}) = 269\,000, \quad \hat{c}(\{M\}) = 204\,600, \quad \hat{c}(\{P\}) = 188\,600,$$
$$\hat{c}(\{G,M\}) = 340\,200, \quad \hat{c}(\{G,P\}) = 321\,800, \quad \hat{c}(\{M,P\}) = 240\,400,$$
$$\hat{c}(\{G,M,P\}) = 348\,600$$

La première rangée donne les coûts de faire cavalier seul et la deuxième ceux de se mettre deux à deux. Le coût d'un réseau capable de satisfaire à toutes les demandes est celui de la dernière rangée. À noter que, quand P est seul, on installe uniquement des conduits de 1 pouce. Si P et M se mettent ensemble, on installe des conduits de 3 pouces, etc. Appliquée à ces données, la méthode Shapley-Shubik donne la répartition qui suit :

	G	M	P	Total
x	170 533.33	97 633.33	80 433.33	348 600.00
%	49	28	23	100

4.2.2 Les propriétés de la règle Shapley-Shubik

On sait que la règle Shapley-Shubik satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux usagers négligeables (IEN)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre usagers (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (O)
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

On sait aussi que la méthode Shapley-Shubik est la seule à satisfaire à (AD), (IEN), (S)[7] et (O) ou encore qu'elle est la seule à satisfaire à (AD), (IEN), (S), (IU) et (MD). Par contre, la méthode Shapley-Shubik viole la préservation des rangs, le traitement égalitaire des équivalents et l'invariance par rapport aux plus grandes demandes. Si on tient à ces propriétés, c'est du côté de la répartition séquentielle qu'il faut se tourner.

4.3 La répartition séquentielle

Avec la répartition séquentielle, les usagers sont ordonnés selon l'ampleur de leur demande. Tous les usagers se voient ensuite imputer une part égale du coût d'un projet ou d'une capacité tout juste suffisante pour répondre à des besoins identiques au plus petit des besoins exprimés. Le plus petit des usagers n'a rien d'autre à payer. Les autres usagers se voient imputer, en plus, une part égale de l'accroissement de coût qu'entraînerait un accroissement de capacité suffisant pour répondre à des demandes de leur part qui seraient toutes égales à celle du deuxième plus petit usager. Ce dernier n'a rien d'autre à payer par la suite. On continue ainsi à imputer, de façon itérative, les coûts incrémentaux associés aux accroissements de capacité nécessités par des demandes de plus en plus grandes.

Par construction, les plus petits usagers sont à l'abri de l'ampleur de la demande des gros, pour le meilleur et le pire. Ils ne vont pas payer pour des demandes dont ils ne sont pas responsables mais, dans un contexte d'économies d'échelle, ils ne vont pas profiter non plus des externalités amenées par ceux qui ont des demandes plus grandes.

4.3.1 Cas des demandes unidimensionnelles et homogènes

On présente d'abord cette méthode pour les demandes unidimensionnelles et homogènes. Supposons qu'il y a n usagers et que leurs demandes soient données par des nombres $q_1, \ldots, q_n$. La demande de l'ensemble des usagers est donc donnée par la liste $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ et la demande totale par $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$. Supposons $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n$.

[7] La symmétrie (S) est une propriété plus forte que le traitement égalitaire des demandes identiques mais plus faible que le traitement égalitaire des demandes équivalentes. Voir BMT- (2002c).

La méthode de répartition séquentielle fait intervenir des demandes intermédiaires définies par les listes $Q^1 = (q_1, \ldots, q_1)$, $Q^2 = (q_1, q_2, \ldots, q_2)$, $Q^3 = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_3)$, ..., $Q^{n-1} = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}, q_{n-1})$. Dans la première de ces listes, les demandes des usagers 2 à n sont ramenées au niveau de celle de l'usager 1. Dans la deuxième, les demandes des usagers 3 à n sont ramenées au niveau de celle de l'usager 2 et ainsi de suite. La répartition séquentielle consiste à répartir $C(Q^1)$ de façon égalitaire entre tous les usagers. Les usagers 2 à n doivent ensuite se partager le coût supplémentaire $C(Q^2) - C(Q^1)$. De façon similaire, les usagers 3 à n doivent se partager le coût supplémentaire $C(Q^3) - C(Q^2)$ et ainsi de suite jusqu'au dernier usager, qui doit payer en plus le coût supplémentaire $C(Q) - C(Q^{n-1})$.

En résumé, la répartition séquentielle est définie par :

$$\left.\begin{aligned}
x_1(Q,C) &= \frac{C(Q^1)}{n} \\
x_2(Q,C) &= x_1(Q,C) + \frac{C(Q^2) - C(Q^1)}{n-1} \\
x_3(Q,C) &= x_2(Q,C) + \frac{C(Q^3) - C(Q^2)}{n-2} \\
&\vdots \\
x_n(Q,C) &= x_{n-1}(Q,C) + C(Q) - C(Q^{n-1})
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

On peut vérifier que : $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C(Q)$. De plus $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. À noter que, s'il y a un coût fixe, cette méthode le répartit de façon égalitaire entre tous les usagers puisqu'il est compris dans $C(Q^1)$.

4.3.2 Cas des demandes multidimensionnelles ou hétérogènes

La répartition séquentielle des coûts exige la construction de demandes intermédiaires. Pour ce faire, les plus grandes demandes sont initialement réduites à un niveau équivalent aux plus petites. Avec des demandes unidimensionnelles et homogènes, cela ne pose pas de problème. Il en va différemment avec des demandes multidimensionnelles ou hétérogènes. Avec la règle séquentielle radiale décrite dans BMT (2002b), on construit ces demandes intermédiaires en réduisant les quantités demandées de façon proportionnelle, i.e. le long d'un rayon, d'où le nom «radiale» donné à la règle. Appliquer cette règle telle quelle dans le présent contexte pourrait mener à des demandes intermédiaires comportant des fractions de conduits, ce qui n'aurait pas beaucoup de sens.

Une autre façon de faire, qui semble toute naturelle ici, est de ramener les demandes des plus gros usagers au niveau de celle des plus petits, tant en dimension qu'en nombre.[8] Considérons le problème qui consiste à répartir le coût de la section 4 du réseau, en négligeant le coût fixe. La demande sur cette section est exprimée par la liste $Q = (8, 4, 1)$. Les usagers doivent donc être considérés dans l'ordre P, M, G. La première étape de la répartition séquentielle requiert la construction des demandes intermédiaires. Ici, la demande de chaque usager est décrite par un seul nombre mais ces demandes portent sur des conduits de tailles différentes, ce dont il faut tenir compte dans la construction des demandes intermédiaires.[9]

Dans l'esprit de la méthode séquentielle, on construit la première demande intermédiaire en ramenant les demandes des usagers M et G au niveau de celle de P, en dimension autant qu'en nombre. Autrement dit, on suppose que tous les usagers demandent un conduit de 1 pouce. La première demande intermédiaire est donc donnée par $Q^1 = (0, 0, 3)$. Pour la deuxième demande intermédiaire, on suppose que G a une demande identique à celle de M, ce qui donne deux demandes de 4 conduits de 3 pouces, en plus de la demande pour un conduit de 1 pouce de la part de P. La deuxième demande intermédiaire est donc $Q^2 = (0, 8, 1)$. Les coûts de ces deux demandes intermédiaires et de la demande globale sont : $C(0, 0, 3) = 63\,600$, $C(0, 8, 1) = 85\,200$ et $C(8, 4, 1) = 112\,000$.

Il s'agit ensuite d'appliquer la formule (3) à ces coûts, en se souvenant que 1 est P, 2 est M et 3 est G. Chaque usager se voit d'abord imputer le tiers de 63 600. Pour P, il s'agit de sa contribution totale. G et M doivent ensuite se partager, en parts égales, la différence

[8] Formellement, on réduit les demandes le long d'un sentier plutôt que d'un rayon, pour obtenir les demandes intermédiaires. Cette approche a en fait un fondement théorique. Elle s'inspire des travaux de Téjédo et Truchon (2002). On la décrit brièvement dans l'annexe B.

[9] On peut appliquer le principe qui va suivre à des demandes individuelles portant sur plusieurs types de conduits.

entre 85 200 et 63 600. Finalement, G doit payer à lui seul l'écart entre 112 000 et 85 200. On obtient ainsi la répartition :

	G	M	P	Total
x	58 800	32 000,	21 200	112 000
%	52	28	19	100

Par comparaison, la règle des coûts moyens, i.e. la répartition de ces mêmes coûts proportionnellement aux demandes, exprimées en nombre ou en longueur totale de conduits, donne :

	G	M	P	Total
x	68 923.10	34 461.50	8 615.38	112 000
%	61	31	8	100

La répartition séquentielle augmente la part de P de façon significative par rapport à la règle des coûts moyens. La raison est la suivante. Il y a un coût important dans la construction d'un massif de conduits qui est indépendant du nombre de conduits, soit 150$ le mètre. Avec la règle séquentielle, ce coût est réparti en parts égales entre les trois usagers, ce qui peut très bien se défendre en termes d'équité. Avec la répartition proportionnelle aux demandes, P s'en tire évidemment mieux dans la mesure où il n'a qu'un conduit sur 13 dans cette section.

On peut ensuite répliquer la méthode qui vient d'être décrite à chacune des sections du réseau et à répartir le coût fixe en parts égales entre les usagers, conformément à l'esprit de la répartition séquentielle. À noter que l'ordre entre les usagers peut varier selon les sections et que les usagers ne vont pas participer au financement des sections où ils ne sont pas présents. Donc, G va devoir assumer seul le coût de la section 1, G et M vont se partager le coût de la section 2, M et P celui de la section 3, G et P celui de la section 5. Le Tableau 3 donne le détail de cette répartition.

Section	G	M	P	Total
1	31 000	0	0	31 000
2	40 800	19 200	0	60 000
3	0	27 300	24 300	51 600
4	58 800	32 000	21 200	112 000
5	28 400	0	15 600	44 000
Coût fixe	16 666.67	16 666.67	16 666.67	50 000
Total (x)	175 666.67	95 166.67	77 766.67	348 600
%	50	27	22	100

Tableau 3 – Répartition séquentielle des coûts du réseau

4.3.3 Les propriétés de la répartition séquentielle

La méthode de répartition séquentielle ainsi définie satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
- Principe séquentiel radial (PSR)[10]
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents (INP)
- Monotonie par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MDR)
- Monotonie croisée négative par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MCNR)[11]
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre usagers (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (O)
- Cohérence faible (CHF)

[10] En plus de satisfaire au principe séquentiel radial, la forme particulière de la règle séquentielle utilisée ici satisfait au principe séquentiel le long des sentiers définis dans l'annexe B. Ainsi, partant de la demande intermédiaire $(0, 0, 3)$, si M accroît sa demande de un conduit de 1 pouce pour deux de 1 pouce ou pour un de 3 pouces, cela ne va pas affecter la contribution de P.

[11] Comme pour le principe séquentiel, elle satisfait également à la monotonie et à la montonie croisée négative le long des sentiers définis dans l'annexe B.

On peut également garantir un majorant aux contributions des usagers. Cette méthode est aussi la seule à satisfaire au traitement égalitaire des demandes équivalentes et au principe séquentiel le long des sentiers définis dans l'annexe B. Il faut par contre oublier l'additivité dans le cas des demandes multidimensionnelles ou hétérogènes.

4.4 Une vue synoptique des propriétés

Dans le Tableau 4, on indique quelles méthodes de répartition traitées dans ce rapport, y compris la répartition selon la longueur des conduits, satisfont aux différentes propriétés énoncées dans la section 3. Un «O» indique que la méthode de la rangée correspondante satisfait à la propriété en question, un «S» qu'elle satisfait à la propriété le long des sentiers définis dans l'annexe B, un «Q» qu'elle satisfait à la propriété en présence d'économies d'échelle, et un «N» que la propriété n'est pas satisfaite, i.e. qu'il existe des contextes ou problèmes dans lesquels elle est violée. Dans certains cas, on indique le nom d'une propriété plus faible ou apparentée qui est vérifiée en lieu de la condition proprement dite.

La propriété (IDN) n'apparaît pas dans ce tableau parce qu'elle est satisfaite par toutes les méthodes, sauf la répartition égalitaire. D'autres propriétés n'y apparaissent pas non plus parce qu'elles sont apparentées à d'autres qui s'y trouvent.

Le tableau est séparé horizontalement en deux parties. La partie supérieure concerne deux règles qui ne peuvent être utilisées qu'avec des demandes portant sur un bien privé homogène alors que les règles de la partie inférieure peuvent être appliquées à un contexte très général, comme c'est le cas d'un réseau souterrain.

Le tableau est également séparé verticalement en deux parties. La partie de gauche regroupe les conditions de type normatif et la partie de droite celles de type cohérence. La distinction entre les deux est cependant parfois ténue, comme on a pu le voir.

Rappelons les abréviations des propriétés :
RG : préservation des rangs
TE : traitement égalitaire des équivalents
PS : principe séquentiel
PSR : principe séquentiel radial

IDN : insensibilité des contributions aux demandes nulles
IEN : insensibilité des contributions aux usagers négligeables
GR : gratuité pour des demandes identiques de coût nul
INP : insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents
MCT : monotonie par rapport aux coûts
MD : monotonie par rapport à la demande
MCN : monotonie croisée négative par rapport à la demande
MCP : monotonie croisée positive par rapport à la demande
PA : participation
APA : anti-participation
CO : test du coeur ou absence d'inter-financement
ACO : test de l'anti-coeur
IU : invariance par rapport aux unités de mesure
O : ordinalité
OR : ordinalité radiale
SE : séparation entre usagers
PR : proportionnalité
AD : additivité
IDC : Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs
CH : cohérence
CHF : cohérence faible

	RG	TE	PS	IEN	INP	MCT	MD	MCN	PA	CO	SE	O	AD	CH
coût moyen	O	O	N	N	O	**O**	O	Q	Q	Q	O	N	O	O
séquentielle originale	O	O	**O**	N	O	N	O	Q	Q	Q	O	N	O	CHF
égalitaire	O	O	N	N	O	O	O	N	N	N	N	O	O	O
longueur	N	N	N	N	O	O	O	N	N	N	N	N	N	O
Shapley-Shubik	N	N	N	**O**	N	N	**O**	**Q**	Q	**Q**	O	O	**O**	N
séquentielle radiale	**O**	**O**	**S**	N	**O**	N	**SQ**	**SQ**	Q	**Q**	O	R	N	N

Tableau 4 – Les propriétés satisfaites par les méthodes

Plusieurs méthodes peuvent satisfaire à une propriété prise isolément. Généralement, on va rechercher des méthodes qui satisfont à plusieurs propriétés à la fois. Idéalement, on aimerait que le plus grand nombre de ces propriétés voire toutes soient satisfaites. Malheureusement, certaines propriétés peuvent être incompatibles entre elles. Un certain nombre de propositions sont démontrées dans la littérature économique à ce sujet. D'autres propositions affirment que telle et telle propriété est satisfaite par telle ou telle méthode. D'autres enfin établissent qu'il y a une seule méthode qui satisfait simultanément à un ensemble donné de propriétés. On a énoncé un certain nombre de ces propositions dans BMT (2002c).

Ainsi, dans le cas des demandes unidimensionnelles et homogènes, il n'y a que la règle des coûts moyens pour satisfaire à la fois aux propriétés d'additivité, de cohérence, de proportionnalité et de traitement égalitaire des équivalents (les égaux dans ce cas-ci). En prime, on obtient la monotonie par rapport aux coûts. En fait, on sait qu'elle est la seule à satisfaire à la fois à la proportionnalité et à la monotonie par rapport aux coûts.

Toujours dans un contexte unidimensionnel, la méthode de répartition séquentielle est la seule à satisfaire à la fois à la préservation des rangs, à la gratuité pour des demandes identiques de coût nul, à la proportionnalité et à l'additivité. Cette dernière méthode satisfait également à la préservation des rangs, à la monotonie par rapport à la demande et au principe séquentiel. Elle est en fait caractérisée par ce dernier principe et le traitement égalitaire des égaux.

Dans le cas des demandes multidimensionnelles, la règle séquentielle définie dans l'annexe B est la seule à satisfaire à la fois au principe séquentiel le long des sentiers de modification de la demande et au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Par contre, il faut oublier l'insensibilité des contributions aux usagers négligeables, l'additivité et même l'insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs.

Si on veut avoir l'additivité, l'insensibilité des contributions aux usagers négligeables, la symétrie, l'invariance par rapport aux unités de mesure et la monotonie par rapport à la demande, c'est vers la règle Shapley-Shubik qu'il faut se tourner. Cette méthode est la seule à satisfaire à toutes ces propriétés à la fois. On peut même retrancher la monotonie par rapport à la demande de cette liste et remplacer l'invariance par rapport aux unités de mesure par l'ordinalité pour obtenir une autre caractérisation de la méthode Shapley-Shubik.

Ces propositions sont résumées dans le Tableau 5. Chaque rangée indique un ensemble de propriétés, marquées d'un «X», que la méthode est la seule à satisfaire simultanément.

	RG	TE	S	PS	IEN	GR	MCT	MD	PR	IU	O	AD	CH
coût moyen							X		X				
coût moyen		X							X			X	X
séquentielle originale		X		X									
séquentielle originale	X					X			X			X	
Shapley-Shubik			X		X						X	X	
Shapley-Shubik			X		X			X		X		X	
séquentielle radiale		X		S									

Tableau 5 – Caractérisations des méthodes

4.5 Propriétés et choix d'une méthode

La règle des coûts moyens est d'un usage très répandu dans les contextes unidimensionnels, i.e. lorsque les demandes des entités s'expriment par un seul nombre et que ces demandes peuvent être sommées pour donner la demande globale. Cette popularité s'explique sans doute pas la simplicité de cette règle. Elle peut se justifier également par ses nombreuses propriétés. Elle satisfait en effet à la plupart de celles qui sont recensées dans ce document. Une exception notable est le principe séquentiel, qui rend les contributions des plus petites entités indépendantes de l'ampleur des demandes des plus grosses.

Pour les situations où l'impact des plus grosses demandes sur les contributions des plus petites entités est une préoccupation importante, la règle de répartition séquentielle est toute indiquée puisqu'elle satisfait au principe séquentiel. En fait, c'est la seule à satisfaire à ce principe en même temps qu'au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Elle satisfait également à toutes les autres propriétés de la règle des coûts moyens, à l'exception de la monotonie par rapport aux coûts. De plus, elle peut être étendue à des contextes où les demandes sont hétérogènes ou multidimensionnelles. Elle conserve la plupart de ses propriétés dans ces contextes, bien que parfois sous une forme plus faible. La seule perte notable est l'additivité (AD) et l'insensibilité des contributions à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC). Ces dernières sont intéressantes parce qu'il arrive souvent qu'on souhaite faire la répartition des coûts composante par composante. Par exemple, on peut vouloir répartir les coûts de capital séparément des frais d'exploitation. L'additivité garantit que, peu importe qu'il y ait décomposition des coûts ou non et peu importe la façon de les décomposer, la répartition totale est la même. Si on sait que la méthode utilisée satisfait à cette propriété, on conviendra facilement qu'il est inutile de consacrer beaucoup d'énergie à la décomposition des coûts.

Dans le même ordre d'idée, on peut souhaiter imputer directement aux entités les coûts qui leur sont spécifiques et réserver l'utilisation d'une règle de répartition aux coûts qui sont véritablement communs. La distinction entre les deux n'étant pas toujours claire, on peut consacrer beaucoup d'efforts pour arriver à établir une telle décomposition des coûts, à la satisfaction de toutes les entités. L'intérêt d'une règle qui satisfait à (IDC) est précisément qu'elle dispense de cet effort parce que, en fin de compte, les résultats seront les mêmes, peu importe la décomposition adoptée.

Si les propriétés (AD) et (IDC) s'avèrent importantes, il faut oublier la règle séquentielle et se tourner plutôt vers les règles issues de la théorie des jeux coopératifs. Parmi ces dernières, celle de Shapley-Shubik est certainement la plus facile à justifier et à utiliser. Avec cette dernière, on retrouve (AD) et (IDC). On gagne également l'insensibilité des contributions aux entités négligeables mais on doit sacrifier la préservation des rangs, le traitement égalitaire des demandes équivalentes, le principe séquentiel et l'insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes.

Dans ce domaine, comme dans bien d'autres, on ne peut donc tout avoir. Il y a des choix à faire et ces choix impliquent des coûts en termes des propriétés sacrifiées et de données requises. Les tableau 4 et 5, dont on trouve des versions plus complètes dans BMT (2002c), se veulent des outils pour aider les gestionnaires à faire un choix éclairé.

4.6 Les données requises

La méthode Shapley-Shubik et la méthode de répartition séquentielle exigent non seulement les coûts de satisfaire à la demande exprimée mais également les coûts de demandes partielles ou hypothétiques, comme celles de sous-groupes d'usagers ou celles d'usagers ayant des demandes identiques à celles du plus petit, du deuxième plus petit, etc.

La méthode de répartition séquentielle est sans doute moins onéreuse à appliquer. Avec n usagers, elle nécessite la construction de n demandes intermédiaires ou globale et l'estimation du coût théorique de ces demandes. En comparaison, la méthode Shapley-Shubik exige l'estimation du coût des demandes de $2^n - 1$ sous-ensembles d'usagers. Ce dernier nombre croit assez rapidement. Il est égal à successivement $3, 7, 15, 31, 63, 127, 255$ lorsque n croit de 2 à 8. Si on dispose d'une formule mathématique pour l'estimation du coût de n'importe quelle demande, comme pour l'exemple de ce document, ces nombres ne posent cependant pas de problème en soi.

Il faut dire aussi que, dans la mesure où plusieurs usagers sont pratiquement identiques ou du moins assez semblables, il n'est peut-être pas nécessaire de tous les distinguer. On peut très bien fonctionner avec des catégories d'usagers. La méthode retenue servirait à répartir les coûts entre ces catégories. Une méthode plus simple ou la même méthode peut ensuite être utilisée pour répartir le coût imputé à une catégorie entre ses membres. Pour la même raison, il ne serait pas nécessaire de refaire tous les calculs à chaque fois qu'arrive un nouvel usager ou une nouvelle demande. Il ou elle peut tout simplement être traité à l'intérieur d'une catégorie.

5 Conclusion et recommandation

Cette étude de la problématique de la répartition des coûts d'un réseau de conduits souterrain nous amène à retenir deux méthodes comme étant particulièrement intéressantes : la règle Shapley-Shubik et la méthode de répartition séquentielle. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces méthodes serait de nature à atténuer les conflits entre les usagers des réseaux souterrains.

La règle Shapley-Shubik possède plusieurs propriétés d'intérêt dans ce contexte. De plus, on peut voir le mode de répartition qu'elle donne comme celui qui pourrait résulter de la négociation entre les usagers. Biddle et Steinberg (1985, p. 42) en parle comme d'un « costless surrogate for the allocation that would be obtained through bargaining ». En effet, il arrive souvent que de nouveaux venus dans un réseau prétendent qu'ils ne devraient pas payer plus que le coût incrémental qu'ils imposent à l'ensemble des usagers, sous prétexte que ceux qui sont déjà présents dans le réseau ne devraient pas profiter de leur arrivée. À l'inverse, les usagers déjà en place ne voient pas pourquoi les nouveaux venus profiteraient ainsi des investissements qu'eux ont dû assumer pour la construction du réseau. Au fond, dans ce genre de problème, chacun aimerait bien être celui qui arrive en dernier. C'est précisément à la résolution de ce genre de conflit que s'adresse la règle Shapley-Shubik.

D'un esprit différent, la méthode de répartition séquentielle nous apparaît encore plus intéressante dans le présent contexte. Parmi ses propriétés, on note l'invariance des contributions par rapport à l'ampleur des plus grosses demandes (le principe séquentiel). Elle est donc à l'abri des plaintes des petits usagers quant aux coûts que leur imposent les plus gros par leur exigences particulières. À l'inverse, ces petits usagers ne bénéficieraient pas des économies d'échelle qu'entraîne la présence de ces gros usagers de par le nombre de conduits en parallèle ou des autres équipements qu'ils requièrent. Cette méthode est donc peut-être la plus susceptible de solutionner les litiges potentiels entre les usagers d'un réseau souterrain.

Annexes

A Le coeur (noyau)

Le coeur est un concept issu de la théorie des jeux coopératifs. C'est un ensemble de répartitions des coûts qu'aucune coalition ou sous-ensemble d'usagers ne va contester sous prétexte qu'elles imputent à ses membres des sommes plus élevées, au total, que le coût auquel elle serait capable de fonctionner seule. Plus précisément, c'est l'ensemble des répartitions $(x_1, \ldots, x_n)$ qui satisfont :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\leq \hat{c}(S), \text{ pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N \\ \sum_{i \in N} x_i &= \hat{c}(N) \end{aligned}$$

La première condition qui précède dit : quelle que soit la coalition S de N, la somme des coûts attribués aux membres de cette coalition ne peut dépasser le coût total $\hat{c}(S)$ auquel cette coalition est capable de fonctionner, sans les autres. La fonction $\hat{c}$ a été définie de façon précise à la sous-section 4.2. La deuxième condition stipule que la somme des coûts attribués à tous les membres, ceux de la grande coalition N, doit couvrir exactement le coût total de desservir l'ensemble de la demande. Cela laisse supposer que c'est la grande coalition qui va se former.

On peut le définir, de façon équivalente, comme l'ensemble des répartitions $(x_1, \ldots, x_n)$ qui satisfont :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\geq \hat{c}(N) - \hat{c}(N \backslash S), \text{ pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N \\ \sum_{i \in N} x_i &= \hat{c}(N) \end{aligned}$$

Sous cette forme, chaque coalition se voit imputer un montant au moins aussi élevé que le coût supplémentaire qu'elle impose à la coalition complémentaire $N \backslash S$ lorsqu'elle la rejoint pour former la grande coalition N. Si ce n'était pas le cas, cette dernière se trouverait à verser un subside aux membres de la coalition S, d'où une possible objection de sa part.

Dans ce rapport, on voit l'*appartenance au coeur* comme une propriété désirable des règles de répartition de coûts. On l'a aussi appelée *robustesse à la sécession* ou *absence d'inter-financement*. Une répartition peut être ou non dans le coeur. Le fait d'appartenir au coeur confère à une répartition donnée un caractère de crédibilité non négligeable.

Il se peut que les conditions qui définissent le coeur soient mutuellement incompatibles. Le coeur est alors vide. Il existe des conditions sur les fonctions de coût qui garantisse l'existence du coeur. Lorsqu'il existe, il peut par contre être très grand. La règle Shapley-Shubik donne des répartitions dans le coeur pour les problèmes concaves, i.e. ceux où les coûts incrémentaux de joindre un sous-ensemble d'usagers décroît à mesure que ce sous-ensemble augmente en taille. Autrement, l'appartenance au coeur n'est pas garantie par cette règle.

Exemple Pour l'exemple de réseau, le coeur est défini par les contraintes suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
x_G \leq 269\,000 & x_M \leq 204\,600 & x_P \leq 188\,600 \\
x_G + x_M \leq 340\,200 & x_G + x_P \leq 321\,800 & x_M + x_P \leq 240\,400 \\
& x_G + x_M + x_P = 348\,600 &
\end{array}
$$

Ainsi, avec une répartition qui appartient au coeur, les usagers G et P ne peuvent se voir imputer des montants supérieurs à respectivement 269 000 et 204 600 parce qu'elles peuvent fonctionner seules à ces coûts respectifs. De plus, elle ne peuvent se voir imputer des montants dont le total dépasserait 340 200 puisque, ensemble, elles pourraient répondre à leurs besoins pour un coût total de 340 200.

B Sur la répartition séquentielle le long de sentiers

La répartition séquentielle des coûts exige que les plus grandes demandes soient initialement réduites à un niveau équivalent aux plus petites. Avec la règle séquentielle radiale, on réduit les quantités demandées de façon proportionnelle, i.e. le long d'un rayon, d'où le nom «radiale» donné à la règle. Téjédo et Truchon (2002), s'inspirant d'une suggestion de Koster et al. (1998), proposent une approche plus générale dans laquelle les demandes sont réduites le long d'un sentier quelconque plutôt que d'un rayon. Cela donne lieu à la répartition séquentielle le long de sentiers (Path Serial Rule). Avec cette règle, les sentiers à utiliser pour réduire la demande font partie de la définition du problème. Ces sentiers sont définis comme suit.

Pour chaque $i \in N$, Téjédo et Truchon considèrent une fonction $h_i : \mathbb{R}_+^{m_i+1} \to \mathbb{R}_+^{m_i}$ qui associe un $h_i(y, \tau) \in \mathbb{R}_+^{m_i}$ à chaque $y \in \mathbb{R}_+^{m_i}$ et $\tau \in \mathbb{R}_+$.[12] Ils supposent que $h_i(y, \cdot)$ n'est pas décroissante, qu'elle est croissante sans borne par rapport à une composante et que, pour chaque $y \in \mathbb{R}_+^{m_i}$, il existe un $\tau' \in \mathbb{R}_+$ (unique) tel que $h_i(y, \tau') = y$.Alors, $h_i(y, \mathbb{R}_+)$ est le sentier défini par $h_i(y, \cdot)$. Ce sentier passe par y. La classe des fonctions h_i ayant ces propriétés est dénotée $\mathcal{H}_i$.

Ils n'imposent pas que $h_i(y, 0) = 0$ et que $h_i(y, \cdot)$ soit continue et croissante dans toutes ses composantes. Par contre, étant donnée une fonction $C \in \mathbb{C}(m)$, ils se restreignent à la classe de fonctions $\mathcal{H}_i(c_i) \subset \mathcal{H}_i$ pour laquelle $c_i(h_i(y, \cdot))$ est continue et croissante, avec $c_i(h_i(y, 0)) = 0$. En fait, ils auraient pu laisser tomber l'hypothèse que $h_i(y, \cdot)$ n'est pas décroissante et ne conserver que $c_i(h_i(y, \cdot))$ est continue et croissante, avec $c_i(h_i(y, 0)) = 0$. Comme $c_i(0) = 0$ et que c_i est croissante, cette hypothèse implique que le coût de la demande au début du sentier est nul et croissant pas la suite. Cette définition de $\mathcal{H}_i(c_i)$ assure l'existence d'un τ_α unique tel que $c_i(h_i(y, \tau_\alpha)) = \alpha$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Soit $\mathcal{H}(C) = \mathcal{H}_1(c_1) \times \cdots \times \mathcal{H}_n(c_n)$, $H(Y, \tau) = (h_1(y_1, \tau_1), \ldots, h_n(y_n, \tau_n))$, $\mathbb{C}(m) \times \mathcal{H} = \{(C, H) : C \in \mathbb{C}(m) \text{ et } H \in \mathcal{H}(C)\}$. Dans ce contexte, un problème de partage de coûts est

[12] m_i est le nombre de paramètres servant à décrire la demande de i.

défini comme un triplet $(Q, C, H) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{C}(m) \times \mathcal{H}(C)$ et une règle de partage comme une fonction $\xi : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{C}(m) \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+^n$.

La répartition séquentielle le long des sentiers définis par les fonctions h_i se fait en «réduisant» les demandes le long des sentiers définis par les fonctions h_i. Plus précisément, on construit la première demande intermédiaire en prenant pour les entités ou usagers $i = 2, \ldots, n$, les demandes $h_i(y, \tau_i)$ telles que $c_i(h_i(y, \tau_i)) = c_1(q_1)$. On procède de façon similaire pour les autres demandes intermédiaires.

La règle de partage séquentiel défini dans ce document tombe dans ce cadre. Pour le voir, convenons d'abord d'exprimer chaque demande q_i comme un élément de $\mathbb{R}_+^{m_i}$. Dans le cadre de l'exemple, il s'agit d'un triplet dont les composantes correspondent respectivement aux conduits de 4, 3 et 1 pouces. Étant donnée une demande $Q = (q_1, q_2, q_3)$ telle que $c_1(q_1) \leq c_2(q_2) \leq c_3(q_3)$, définissons, pour chaque $i \in N$ et pour $y \in \{q_1, q_2, q_3\}$, la fonction $h_i : \mathbb{R}_+^{3+1} \to \mathbb{R}_+^3$ par :

$$h_i(y, \tau) = \begin{cases} \tau q_1 & \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \\ (2-\tau) q_1 + (\tau - 1) q_2 & \text{si} \quad 1 < \tau \leq 2 \\ (3-\tau) q_2 + (\tau - 2) q_3 & \text{si} \quad 2 < \tau \leq 3 \\ (\tau - 3) q_3 & \text{si} \quad 3 < \tau \end{cases}$$

Le sentier défini par cette fonction passe par les points $0, q_1, q_2, q_3$. Il s'agirait de compléter la définition de cette fonction pour $y \notin \{q_1, q_2, q_3\}$, i.e. de définir d'autres sentiers passant par les $y \notin \{q_1, q_2, q_3\}$, pour compléter la classe $\mathcal{H}(C)$ mais ces autres sentiers ne seraient pas utiles dans le présent contexte. On peut aussi généraliser la définition qui précède à un nombre quelconque d'usagers.

Avec cette définition des h_i, la fonction $c_i(h_i(y \cdot))$ est continue et strictement croissante. De plus, $h_i(y, 0) = 0$, $h_i(y, 1) = q_1$, $h_i(y, 2) = q_2$ et $h_i(y, 3) = q_3$. On a donc $c_2(h_2(q_2, 1)) = c_2(q_1) = c_1(q_1)$, $c_3(h_3(q_3, 1)) = c_1(q_1)$ et $c_3(h_3(q_3, 2)) = c_2(q_2)$. En conséquence, la première demande intermédiaire est donnée par $Q^1 = (q_1, \ h_2(q_2, 1), \ h_3(q_3, 1)) = (q_1, q_1, q_1)$ et la deuxième par $Q^2 = (q_1, \ q_2, \ h_3(q_3, 2)) = (q_1, q_2, q_2)$. Toutes leurs composantes sont entières dans la mesure où les demandes le sont. S'agissant du nombre de conduits, le contraire n'aurait pas de sens.

La règle définie dans ce document est donc en fait celle de Téjédo et Truchon (2002) appliquée au problème (Q, C, H) où $H = (h_1, h_2, h_3)$, avec la fonction $h_i, i = 1, 2, 3$, définie plus haut. D'autres fonctions H donneraient le même résultat, nommément la fonction $H' = (h'_1, h'_2, h'_3)$ avec : $h'_1(q_1, \tau) = \tau q_1$,

$$h'_2(q_2, \tau) = \begin{cases} \tau q_1 & \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \\ (2 - \tau) q_1 + (\tau - 1) q_2 & \text{si} \quad 1 < \tau \leq 2 \\ (\tau - 2) q_2 & \text{si} \quad 2 < \tau \end{cases}$$

$$h'_3(q_3, \tau) = \begin{cases} \tau q_1 & \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \\ (2 - \tau) q_1 + (\tau - 1) q_2 & \text{si} \quad 1 < \tau \leq 2 \\ (3 - \tau) q_2 + (\tau - 2) q_3 & \text{si} \quad 2 < \tau \leq 3 \\ (\tau - 3) q_3 & \text{si} \quad 3 < \tau \end{cases}$$

Un autre possibilité consisterait à prendre des sentiers en escalier. Par exemple, pour $q_2 = (0, 4, 0)$, on peut envisager le sentier fait de segments joignant les points $(0, 0, 0), (0, 0, 1)$, $(0, 0, 2), (0, 2, 0), (0, 3, 0), (0, 4, 0)$ ou tout autre sentier du genre passant par $q_1 = (0, 0, 1)$ pour rejoindre $(0, 4, 0)$. On peut de même définir un sentier passant par q_1 et q_2 pour rejoindre $q_3 = (8, 0, 0)$.

À noter que H et H', de même que ces autres sentiers en escalier, ont une justification naturelle dans le présent contexte. Respecter le principe séquentiel dans son esprit, c'est mettre les petits à l'abri de l'ampleur de la demande des plus gros. Or, cette ampleur, elle vient autant de la taille des conduits que de leur nombre. En réduisant les plus grosses demandes le long des sentiers qui viennent d'être définis, on met véritablement les petits à l'abri des plus gros. La répartition séquentielle le long de ces sentiers respectent le *principe séquentiel le long des sentiers.* C'est ce que montrent Téjédo et Truchon. Autrement dit, si un usager augmente sa demande le long des sentiers décrits par H ou H', cela n'affecte pas la contribution des usagers qui avaient initialement une demande inférieure, en termes de coûts, à celle de cet usager.

C Sommaire des exemples

Répartition selon la longueur des conduits

	G	M	P	Total
x	236 148.39	78 716.13	33 735.48	348 600.00
%	68	23	10	100

Répartition selon la règle Shapley-Shubik :

	G	M	P	Total
x	170 533.33	97 633.33	80 433.33	348 600.00
%	49	28	23	100

Répartition séquentielle :

	G	M	P	Total
x	175 666.67	95 166.67	77 766.67	348 600.00
%	50	27	22	100

Références

Biddle, G.C. et Steinberg, R., 1985. "Common Cost Allocation in the Firm," in *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, ed. by H. P. Young, North Holland, 31-54.

Boyer, M., Moreaux, M. et M. Truchon 2002a. "Le partage des coûts communs : enjeux, problématique et pertinence", CIRANO 2002RP-17.

Boyer, M., M. Moreaux, et M. Truchon, 2002b. "Les méthodes de partage de coûts : un survol", CIRANO 2002RP-18.

Boyer, M., Moreaux, M. et M. Truchon 2002c. "Les méthodes de partage de coûts : propriétés", CIRANO 2002RP-19.

Koster, M., Tijs, S., et Borm, P, 1998. "Serial Cost Sharing Methods for Multicommodity Situations," *Mathematical Social Science*, 36, 229-242.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2002. "Serial Cost Sharing in Multidimensional Centexts," *Mathematical Social Science*, 44, 277-299.

Documents * CIRANO *
sur
Le partage des coûts communs et la tarification des infrastructures
http ://www.cirano.qc.ca/publications/
****

[1] 2002RP-17 Le partage des coûts communs : enjeux, problématique et pertinence

[2] 2002RP-18 Les méthodes de partage de coûts : un survol

[3] 2002RP-19 Les méthodes de partage de coûts : propriétés

[4] 2002RP-20 Les jeux de coûts : définitions et propriétés souhaitables des solutions

[5] 2002RP-21 Les jeux de coûts : principaux concepts de solution

[6] 2003RP-04 Le cas des réseaux municipaux souterrains

[7] 2003RP-05 Partage des coûts dans l'entreprise et incitations

[8] 2003RP-06 Tarification optimale des infrastructures communes